# **Completing Some Partial Latin Squares**

#### Jaromy Kuhl

University of West Florida

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 >

### Contents



æ

#### Contents





Jaromy Kuhl (UWF)

#### Contents





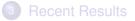


Jaromy Kuhl (UWF)

# **Current Section**



2 Classical Results



Jaromy Kuhl (UWF)

#### Partial latin squares

#### **Definition 1**

A partial latin square (PLS) of order n is an  $n \times n$  array of n symbols in which each symbol occurs at most once in each row and column.

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 >

#### Partial latin squares

#### **Definition 1**

A partial latin square (PLS) of order n is an  $n \times n$  array of n symbols in which each symbol occurs at most once in each row and column.

#### **Definition 2**

A PLS of order n is called a latin square (LS) of order n if each cell is nonempty.

#### Partial latin squares

#### **Definition 1**

A partial latin square (PLS) of order n is an  $n \times n$  array of n symbols in which each symbol occurs at most once in each row and column.

#### **Definition 2**

A PLS of order n is called a latin square (LS) of order n if each cell is nonempty.

1		4		
2				3
	1		3	
		2		5
3				1

1	2	3	4	5
2	4	1	5	3
5	1	2	3	4
4	3	5	1	2
3	5	4	2	1

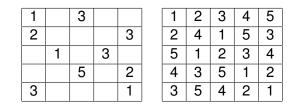
A D M A A A M M

#### **Definition 3**

# A PLS P is called completable if there is a LS of the same order containing P.

#### **Definition 3**

A PLS P is called completable if there is a LS of the same order containing P.



When can a PLS be completed?

#### When can a PLS be completed?

1		3		
2				3
	2	4	3	5
		5		2
3				1

When can a PLS be completed?

1		3		
2				3
	2	4	3	5
		5		2
3				1

• The problem of completing PLSs is NP-complete. (Colbourn, 1984)

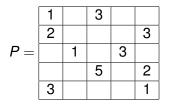
When can a PLS be completed?

1		3		
2				3
	2	4	3	5
		5		2
3				1

- The problem of completing PLSs is NP-complete. (Colbourn, 1984)
- A good characterization of completable partial latin square is unlikely.

A PLS *P* of order *n* is a subset of  $[n] \times [n] \times [n]$  in which  $(r, c, s) \in P$  if and only if symbol *s* occurs in cell (r, c).

A PLS *P* of order *n* is a subset of  $[n] \times [n] \times [n]$  in which  $(r, c, s) \in P$  if and only if symbol *s* occurs in cell (r, c).



 $(2, 1, 2), (4, 3, 5) \in P$ 

### **Equivalent Objects**

#### A LS of order *n* is equivalent to a properly *n*-edge-colored $K_{n,n}$ .

# **Equivalent Objects**

A LS of order *n* is equivalent to a properly *n*-edge-colored  $K_{n,n}$ .

	1	2	3
L =	2	3	1
	3	1	2

# **Equivalent Objects**

A LS of order *n* is equivalent to a properly *n*-edge-colored  $K_{n,n}$ .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Theorem 1

Let G be a bipartite graph with  $\Delta(G) = m$ . Then  $\chi'(G) = m$ .

イロト イポト イヨト イヨ

Let  $P \in PLS(n)$  and  $S_n$  be the symmetric group acting on [n].

イロト イポト イヨト イヨ

Let  $P \in PLS(n)$  and  $S_n$  be the symmetric group acting on [n]. Let  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_n \times S_n \times S_n$ .

Let  $P \in PLS(n)$  and  $S_n$  be the symmetric group acting on [n].

Let  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_n \times S_n \times S_n$ .

The PLS in which the rows, columns, and symbols of *P* are permuted according to  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  respectively is  $\theta(P) \in PLS(n)$ .

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 >

Let  $P \in PLS(n)$  and  $S_n$  be the symmetric group acting on [n].

Let  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_n \times S_n \times S_n$ .

The PLS in which the rows, columns, and symbols of *P* are permuted according to  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  respectively is  $\theta(P) \in PLS(n)$ .

The mapping  $\theta$  is called an isotopism, and *P* and  $\theta(P)$  are said to be isotopic.

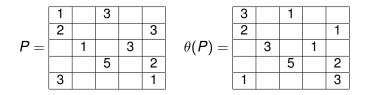
< ロ > < 同 > < 回 > < 回 >

Let  $P \in PLS(n)$  and  $S_n$  be the symmetric group acting on [n].

Let 
$$\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_n \times S_n \times S_n$$
.

The PLS in which the rows, columns, and symbols of *P* are permuted according to  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  respectively is  $\theta(P) \in PLS(n)$ .

The mapping  $\theta$  is called an isotopism, and *P* and  $\theta(P)$  are said to be isotopic.

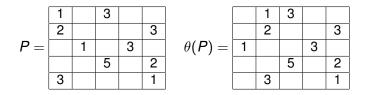


Let  $P \in PLS(n)$  and  $S_n$  be the symmetric group acting on [n].

Let 
$$\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_n \times S_n \times S_n$$
.

The PLS in which the rows, columns, and symbols of *P* are permuted according to  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  respectively is  $\theta(P) \in PLS(n)$ .

The mapping  $\theta$  is called an isotopism, and *P* and  $\theta(P)$  are said to be isotopic.

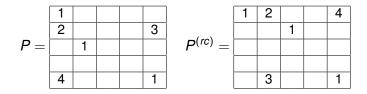


The PLS in which the coordinates of each triple of *P* are uniformly permuted is called a conjugate of *P*.

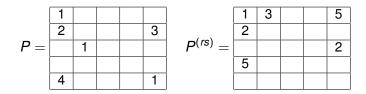
A D M A A A M M

**∃** ▶ ∢

The PLS in which the coordinates of each triple of *P* are uniformly permuted is called a conjugate of *P*.



The PLS in which the coordinates of each triple of *P* are uniformly permuted is called a conjugate of *P*.



• • • • • • • • • • • • •

Introduction

#### Isotopisms and Congujates

#### Theorem 2

#### A PLS P is completable if and only if an isotopism of P is completable.

イロト イポト イヨト イヨ

Introduction

#### Isotopisms and Congujates

#### Theorem 2

A PLS P is completable if and only if an isotopism of P is completable.

#### **Theorem 3**

A PLS P is completable if and only if a conjugate of P is completable.

#### **Current Section**







- ∢ ∃ ▶

#### Theorem 4 (Hall's Theorem, 1940)

Let  $r, n \in \mathbb{Z}$  such that  $r \leq n$ . Let  $P \in PLS(n)$  with r completed rows and n - r empty rows. Then P can be completed to a LS of order n.

∃ >

#### Theorem 4 (Hall's Theorem, 1940)

Let  $r, n \in \mathbb{Z}$  such that  $r \leq n$ . Let  $P \in PLS(n)$  with r completed rows and n - r empty rows. Then P can be completed to a LS of order n.

Rows can be replaced with columns or symbols.

A D b 4 A b

1	2	3	4	5	6	7
2 5	6	1	7	3	4	5
5	1	7	3	4	2	6

Jaromy Kuhl (UWF)

2

1	2	3		
2	6	1		
2 3	1	7		
4	5	6		
5	7	2		
6	4	5		
7	3	4		

æ

1	2	3				
2 3		1				3
3	1	2				
			1	2	3	
	3		2	1		
			3		1	2
				3	2	1

æ

# Ryser's Theorem

#### Theorem 5 (Ryser's Theorem, 1950)

Let  $r, s, n \in \mathbb{Z}$  such that  $r, s \le n$ . Let  $P \in PLS(n)$  with a  $r \times s$  block of symbols and empty cells elsewhere. Then P can be completed if and only if each symbol occurs r + s - n times in P.

< □ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □

# Ryser's Theorem

#### Theorem 5 (Ryser's Theorem, 1950)

Let  $r, s, n \in \mathbb{Z}$  such that  $r, s \le n$ . Let  $P \in PLS(n)$  with a  $r \times s$  block of symbols and empty cells elsewhere. Then P can be completed if and only if each symbol occurs r + s - n times in P.

1	2	3		
2	4	5		
5	1	2		

1	2	3	5		
2	4	5	6		
5	1	2	4		
3	5	6	1		

< □ > < □ > < □ > < □ >

#### Theorem 6

If  $P \in PLS(n)$  with at most n - 1 non-empty cells, then P can be completed.

• • • • • • • • • • • • •

#### Theorem 6

If  $P \in PLS(n)$  with at most n - 1 non-empty cells, then P can be completed.

Confirmed independently by:

● Häggkvist (1979) for *n* ≥ 1111

#### Theorem 6

If  $P \in PLS(n)$  with at most n - 1 non-empty cells, then P can be completed.

Confirmed independently by:

- Häggkvist (1979) for *n* ≥ 1111
- Smetaniuk (1981) for all n

< < >> < <</p>

#### Theorem 6

If  $P \in PLS(n)$  with at most n - 1 non-empty cells, then P can be completed.

Confirmed independently by:

- Häggkvist (1979) for *n* ≥ 1111
- Smetaniuk (1981) for all n
- Andersen and Hilton (1983) for all n

4 A N

#### Theorem 6

If  $P \in PLS(n)$  with at most n - 1 non-empty cells, then P can be completed.

Confirmed independently by:

- Häggkvist (1979) for *n* ≥ 1111
- Smetaniuk (1981) for all n
- Andersen and Hilton (1983) for all n

4 A N

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1					
		5		4	
5					
			3		
	1				

◆□▶ ◆圖▶ ◆理≯ ◆理≯

Ξ.

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1				
		5	4	
5				
	1			

Jaromy Kuhl (UWF)

Completing Partial Latin Squares

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1	2	4	5	6	7
2	7	5	1	4	6
5	4	6	2	7	1
6	5	1	7	2	4
7	6	2	4	1	5
4	1	7	6	5	2

Jaromy Kuhl (UWF)

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1	2	4	5	6	7	
2	7	5	1	4	6	
5	4	6	2	7	1	
6	5	1	7	2	4	
7	6	2	4	1	5	
4	1	7	6	5	2	

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1	2	4	5	6	7	
2	7	5	1	4		6
5	4	6	2		1	7
6	5	1		2	4	7
7	6		4	1	5	2
4		7	6	5	2	1

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1	2	4	5	6	7	
2	7	5	1	4		6
5	4	6	2		1	7
6	5	1		7	4	2
7	6		4	1	5	2
4		7	6	5	2	1

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1	2	4	5	6	7	
2	7	5	1	4		6
5	4	6	2		1	7
6	5	1		7	4	2
7	6		4	2	5	1
4		7	6	5	2	1

1					
	4	5			
5					
			3		
				1	

1	2	4	5	6	7	
2	7	5	1	4		6
5	4	6	2		1	7
6	5	1		7	4	2
7	6		4	2	5	1
4		7	6	1	2	5

1						
	4	5				
5						
			3			
				1		

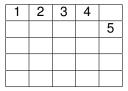
1	2	4	5	6	7	3
2	7	5	1	4	3	6
5	4	6	2	3	1	7
6	5	1	3	7	4	2
7	6	3	4	2	5	1
4	3	7	6	1	2	5

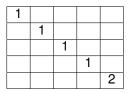
Jaromy Kuhl (UWF)

æ

・ロト ・ 四ト ・ ヨト ・ ヨト

1			
2			
3			
4			
	5		

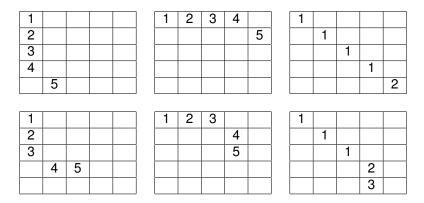




Э.

1					1	2	3	4			1				
2									5	1		1			
3													1		
4														1	
	5														2
	•			J I						J					
	U		1	J		1	I	I	1	J					
1					1	2	3			]	1				
1					1	2	3	4		]	1	1			
1 2 3					1	2	3	4		]	1	1	1		
	4	5			1	2	3			]	1	1	1	2	

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 >



Let  $B_{k,n} \in PLS(n)$  with symbol 1 in the first k diagonal cells and symbols 2, 3, ..., n - k + 1 in the last n - k cells of column k + 1.

э

・ロト ・四ト ・ヨト ・ヨト

#### Theorem 7 (Andersen and Hilton, 1983)

Let  $P \in PLS(n)$  with exactly n non-empty cells. Then P can be completed if and only if P is not a species of  $B_{k,n}$  for each k < n.

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

### **Current Section**

# Introduction

2 Classical Results



Jaromy Kuhl (UWF)

- ∢ ∃ ▶

When can a PLS with exactly a rows and b columns be completed?

A D M A A A M M

When can a PLS with exactly a rows and b columns be completed?

1	2	4	5	6	7	3
2	7	5	1	3	6	4
5	4					
6	5					
3	6					
4	1					
7	3					

A D M A A A M M

When can a PLS with exactly a rows and b columns be completed?

1	2	4	5	6	7	3
2	7	5	1	3	6	4
5	4					
6 3	5					
3	6					
4	1					
7	3					

 Buchanan found all such PLSs for a = b = 2 in a 100 page dissertation (2007)

When can a PLS with exactly a rows and b columns be completed?

1	2	4	5	6	7	3
2	7	5	1	3	6	4
5	4					
6	5					
3	6					
4	1					
7	3					

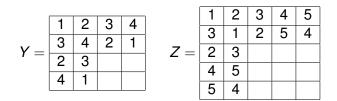
- Buchanan found all such PLSs for a = b = 2 in a 100 page dissertation (2007)
- Adam, Bryant, and Buchanan shortened Buchanan's case analysis to 25 pages (2008)

When can a PLS with exactly a rows and b columns be completed?

1	2	4	5	6	7	3
2	7	5	1	3	6	4
2 5	4					
6	5					
3	6					
4	1					
7	3					

- Buchanan found all such PLSs for a = b = 2 in a 100 page dissertation (2007)
- Adam, Bryant, and Buchanan shortened Buchanan's case analysis to 25 pages (2008)
- Kuhl and McGinn proved the same result and more (2017)

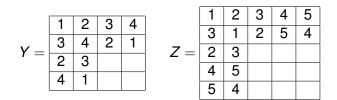
# **Completed Rows and Columns**



æ

・ロト ・ 四ト ・ ヨト ・ ヨト

# Completed Rows and Columns



Let  $\Gamma$  denote the set of all isotopisms of *Y* and *Z*.

#### **Theorem 8**

Let  $n \ge 2$  and  $A \in PLS(2, 2; n)$ . The partial latin square A can be completed if and only if  $A \notin \Gamma$ .

• • • • • • • • • • • • • •

Suppose there is a filled cell of  $A \in PLS(2, 2; n)$  not in an intercalate.

< 4 →

Suppose there is a filled cell of  $A \in PLS(2, 2; n)$  not in an intercalate.

1	2	4	5	6	7	3
2 5	7	5	1	3	6	4
	4					
6 3	5					
	6					
4	1					
7	3					

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

# **Completed Rows and Columns**

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

1	2	5	6	7	3
2	7	1	3	6	5
7	3				
6	5				
3 5	6				
5	1				

イロト イ理ト イヨト イヨト

Jaromy Kuhl (UWF)

**Completing Partial Latin Squares** 

# **Completed Rows and Columns**

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

1	2	5	6	7	3
2	7	1	3	6	5
7	3	2	1	5	6
6	5	3	7	2	1
3	6	7	5	1	2
5	1	6	2	3	7

イロト イ理ト イヨト イヨト

Jaromy Kuhl (UWF)

**Completing Partial Latin Squares** 

# **Completed Rows and Columns**

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

1	2	5	6	7	3	
2	7	1	3	6	5	
7	3	2	1	5	6	
6	5	3	7	2	1	
3	6	7	5	1	2	
5	1	6	2	3	7	

イロト イ理ト イヨト イヨト

# **Completed Rows and Columns**

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

1	2	5	6	7	3	
2	7	1	3	6		5
7	3	2	1		6	5
6	5	3		2	1	7
3	6		5	1	2	7
5		6	2	3	7	1

イロト イ理ト イヨト イヨト

# **Completed Rows and Columns**

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

1	2	5	6	7	3	
2	7	1	3	6		5
7	3	2	1		5	6
6	5	3		2	1	7
3	6		7	5	2	1
5		6	2	1	7	3

イロト イ理ト イヨト イヨト

#### **Completed Rows and Columns**

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3	2	1	4	5	6
6	5	3	4	2	1	7
3	6	4	7	5	2	1
5	4	6	2	1	7	3

イロト イ理ト イヨト イヨト

#### **Completed Rows and Columns**

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3					
6	5					
3	6					
5	4					
4	1					

1	2	5	6	7	3	4
2	7	1	3	6	4	5
7	3	2	1	4	5	6
6	5	3	4	2	1	7
3	6	4	7	5	2	1
5	4	6	2	1	7	3
4	1	7	5	3	6	2

イロト イ理ト イヨト イヨト

#### **Completed Rows and Columns**

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	1					
6	4					
4	6					
5	7					
7	5					

1	2	4	3	7	6	4	5
3	4	2	1	6	7	5	4
4	3						
2	1						
7	6						
6	7						
4	5						
5	4						

イロト イ理ト イヨト イヨト

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	1					
6	4					
4	6					
5	7					
7	5					

1	2	3	4	6	5
2	3	1	5	4	6
3 6	1				
	4				
5	6				
4	5				

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	1					
6	4					
4	6					
5	7					
7	5					

1	2	3	4	6	5
2	3	1	5	4	6
3	1	4	6	5	2
6	4	5	1	2	3
5	6	2	3	1	4
4	5	6	2	3	1

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	1					
6	4					
4	6					
5	7					
7	5					

4	3	1	6	5	2	
3	1	2	4	6	5	
1	2	3	5	4	6	
5	6	4	1	2	3	
2	5	6	3	1	4	
6	4	5	2	3	1	

◆□▶ ◆圖▶ ◆理≯ ◆理≯

Jaromy Kuhl (UWF)

46 / 57

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	1					
6	4					
4	6					
5	7					
7	5					

4	3	1	6	5	2	
3	1	2	4	6		5
1	2	3	5		6	4
5	6	4		2	3	1
2 6	5		3	1	4	6
6		5	2	3	1	4

Ξ.

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	1					
6	4					
4	6					
5	7					
7	5					

4	3	1	6	5	2	
3	1	2	4	6		5
1	2	3	5		6	4
5	6	4		2	3	1
2 6	5		3	1	4	6
6		5	2	4	1	3

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	1					
6	4					
4	6					
5	7					
7	5					

4	3	1	6	5	2	7
3	1	2	4	6	7	5
1	2	3	5	7	6	4
5	6	4	7	2	3	1
2	5	7	3	1	4	6
6	7	5	2	4	1	3
7	4	6	1	3	5	2

#### Theorem 9 (Kuhl and McGinn, 2017)

Let  $A \in PLS(2, b; n)$  and cells  $[2] \times [b]$  consist only of symbols from [b]. If  $n \ge 2b^2 - 2b + 5$  and  $\sigma_A([n] \setminus [b])$  contains a cycle of length at least  $\frac{n+3}{2}$ , then A can be completed.

#### Theorem 9 (Kuhl and McGinn, 2017)

Let  $A \in PLS(2, b; n)$  and cells  $[2] \times [b]$  consist only of symbols from [b]. If  $n \ge 2b^2 - 2b + 5$  and  $\sigma_A([n] \setminus [b])$  contains a cycle of length at least  $\frac{n+3}{2}$ , then A can be completed.

#### **Conjecture 1**

Let  $A \in PLS(2, b; n)$ . If  $n \ge 2b + 2$ , then A can be completed.

#### One Nonempty Row, Column, and Symbol

#### Theorem 10 (Kuhl and Schroeder, 2016)

Let  $r, c, s \in \{1, 2, ..., n\}$  and let  $P \in PLS(n)$  in which each nonempty cell lies in row r, column c, or contains symbol s. If  $n \notin \{3, 4, 5\}$  and row r, column c, and symbol s can be completed in P, then a completion of P exists.

< □ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □

#### One Nonempty Row, Column, and Symbol

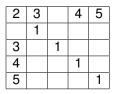
#### Theorem 10 (Kuhl and Schroeder, 2016)

Let  $r, c, s \in \{1, 2, ..., n\}$  and let  $P \in PLS(n)$  in which each nonempty cell lies in row r, column c, or contains symbol s. If  $n \notin \{3, 4, 5\}$  and row r, column c, and symbol s can be completed in P, then a completion of P exists.





Γ	1	3	2	4	5
	2	1			
	3		1		
Γ	4			1	
	5				1



・ロト ・ 同ト ・ ヨト ・ ヨ

# One Nonempty Row, Column, and Symbol

1	5	2	6	7	3	4	1	5	7	2	6	3	4
2	1						2	1					
3		1					5		1				
4			1				3			1			
5				1			4				1		
6					1		6					1	
7						1	7						1

크

# One Nonempty Row, Column, and Symbol

1	5	2	6	7	3	4	1	5	2	7	6	3	4
2	1						2	1					
3		1					5			1			
4			1				3		1				
5				1			4				1		
6					1		6					1	
7						1	7						1

# One Nonempty Row, Column, and Symbol

1	5	2	6	7	3	4	1	5	2	7	6	3	4
2	1						2	1					
3		1					5		1				
4			1				3			1			
5				1			4				1		
6					1		6					1	
7						1	7						1

# One Nonempty Row, Column, and Symbol

1	5	2	6	7	3	4	1	5	2	7	6	3	4
2	1						2	1					
3		1					5		1	4			
4			1				3		4	1			
5				1			4				1		
6					1		6					1	
7						1	7						1

크

# One Nonempty Row, Column, and Symbol

1	5	2	6	7	3	4	1	5	2	7	6	3	4
2	1						2	1					
3		1					5		1	4			
4			1				3		4	1			7
5				1			4				1	6	
6					1		6				4	1	
7						1	7			3			1

# One Nonempty Row, Column, and Symbol

4	5	2	6	7	3	1
2					1	
3				1		
7			1			
5		1				
6	1					
1						

Jaromy Kuhl (UWF)

**Completing Partial Latin Squares** 

イロト イヨト イヨト イヨト